### 散度 散度定理

2017/2/4

我们在矢量场中取一个闭合曲面，其内部空间记为．以向外为正方向，矢量场过闭合曲面的通量，可以用以下面积分表示，积分范围默认为



现在我们把该曲面以其内部一点为中心不断按比例缩小，若通量与体积的比值存在极限，就把该极限叫做该点的**散度**，用Del 算符记为（下文将介绍）



若场的分布连续且光滑，则该极限处处存在且与曲面的形状无关（不证明，见下例），我们就得到了矢量场的散度场（标量场）．

**例一**：假设密度不变的水以匀速流动，流密度构成的场为恒定场．对于任何一个闭合曲面，流入的流量（负值）和流出的流量（正值）一样多，通量为零．

**例二**：在例一中，假设水的（质量）流密度场与坐标成正比，（为常数），那么取一个边长为的立方体，从左侧的流量为，右侧的流量为，其余四面没有流量，总流量为 ．根据定义，水流的散度处处为．分析可发现该水流中单位体积单位时间必然会凭空产生质量为的水（虽然实际中这是不可能的）．所以散度也叫**源密度**．

**直角坐标系中的散度**

假设矢量场为



令闭合曲面为立方体的表面．先来考虑x方向两个正方形的通量，在点附近使用全微分近似得（为简便书写，以下的函数值和偏导都默认在处取值）



由于只有方向的场分量对有贡献，



同理可以得到另外四个正方形的通量．六个正方形的总通量为



现在根据定义式\*，得直角坐标中的散度公式



从形式上，我们可以引入一个Del算符，在直角坐标系中的形式为



那么从形式上可以看做**矢量算符**与某点场矢量的“点乘”．显然是一个**线性算符**，即多个矢量场的线性组合的散度等于它们分别求散度再线性组合



例3：自由电场或引力场的散度为零（也可以引用球坐标中散度的结论）

**散度定理**

现在来考虑一个有限大的闭合曲面并计算通量． 我们先把曲面内的空间划分成许多体积足够小的微元，第*i*个的体积为，通量为．现在来证明所有小曲面的通量之和等于大曲面的通量．

图\*中所有微元的曲面可划分为两部分，一是相邻两个小曲面的边界（红色），二是小曲面与大曲面重合的部分（黑色）．前者产生的通量之和为零，因为这些边界都是由正方向相反的两块小曲面重合而成，他们产生的通量等大反向，互相抵消．后者产生的通量等于大曲面的通量，这是因为每块黑色边界都是由正方向相同的小曲面和大曲面重合而成，产生的通量等大同向．所以总通量等于



用定积分的思想表示，就是



所以散度定理就是，矢量场在任意闭合曲面的通量等于矢量场的散度在曲面所围空间的体积分．

例4 (给出一些场和曲面，证明散度定理成立)